

10



FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

El estudio de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas será el hilo conductor de la unidad, los alumnos aprenderán a describir características de cada una de ellas.

Al inicio de esta unidad se presenta la función exponencial y se repasan su representación gráfica y sus propiedades que los alumnos conocen de cursos anteriores. A continuación, se trabaja la función logarítmica y sus propiedades. En ambos casos, se muestran aplicaciones de estas funciones en situaciones cotidianas. Es importante que el alumno recuerde los contenidos relativos a potencias y logaritmos que estudió en cursos anteriores para poder comprender y utilizar contenidos más complejos.

Se presentan las funciones trigonométricas, para profundizar después en sus características. Finalmente, se estudian las funciones trigonométricas inversas.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL)**. En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, representaciones gráficas de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas así como sus características, etcétera; para trabajar con los alumnos el hecho de que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Definir y representar funciones exponenciales, así como determinar sus propiedades.
- Definir y representar funciones logarítmicas, así como determinar sus propiedades.
- Definir y representar funciones trigonométricas así como trigonométricas inversas, además de determinar sus propiedades.
- Aplicar el estudio de funciones a situaciones cotidianas como el interés compuesto o la resolución de problemas.
- Analizar las propiedades que cumplen las transformaciones de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Función exponencial Definición Representación gráfica y propiedades de la función exponencial La importancia de la función $f(x) = e^x$	1. Identificar funciones exponenciales dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real. 2. Estudiar y representar gráficamente funciones exponenciales obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	1.1. Identifica y expresa analíticamente funciones exponenciales. 1.2. Interpreta las propiedades locales y globales de funciones exponenciales, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. 1.3. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones exponenciales en contextos reales. 2.1. Representa gráficamente funciones exponenciales, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 2.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones exponenciales.	CMCT CD CL CAA CSC
Función logarítmica Definición Representación gráfica y propiedades de la función logarítmica	3. Identificar funciones logarítmicas dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real. 4. Estudiar y representar gráficamente funciones logarítmicas obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	3.1. Identifica y expresa analíticamente funciones logarítmicas. 3.2. Interpreta las propiedades locales y globales de funciones logarítmicas, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. 3.3. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones logarítmicas en contextos reales. 4.1. Representa gráficamente funciones logarítmicas, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones logarítmicas.	CMCT CD CL CAA
Funciones trigonométricas Función seno Función coseno Función tangente Función cotangente	5. Identificar funciones trigonométricas dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real. 6. Estudiar y representar gráficamente funciones trigonométricas obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	5.1. Identifica y expresa analíticamente funciones trigonométricas. 5.2. Interpreta las propiedades locales y globales de funciones trigonométricas, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. 5.3. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones trigonométricas en contextos reales. 6.1. Representa gráficamente funciones trigonométricas, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 6.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones trigonométricas.	CMCT CD CL CAA
Funciones trigonométricas inversas Función arcoseno Función arcocoseno Función arcotangente	5. Identificar funciones trigonométricas inversas dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real. 6. Estudiar y representar gráficamente funciones trigonométricas inversas obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	5.1. Identifica y expresa analíticamente funciones trigonométricas inversas. 5.2. Interpreta las propiedades locales y globales de funciones trigonométricas inversas, comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados. 5.3. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones trigonométricas inversas en contextos reales. 6.1. Representa gráficamente funciones trigonométricas inversas, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 6.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones trigonométricas inversas.	CMCT CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

PARA EL ALUMNO

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Función exponencial

- Definición
- Representación gráfica y propiedades de la función exponencial
- La importancia de la función $f(x) = e^x$

GeoGebra. Funciones exponenciales

2. Función logarítmica

- Definición
- Representación gráfica y propiedades de la función logarítmica

GeoGebra. Funciones logarítmicas

3. Funciones trigonométricas

- Función seno
- Función coseno
- Función tangente
- Función cotangente

4. Funciones trigonométricas inversas

- Función arcoseno
- Función arcocoseno
- Función arcotangente

GeoGebra. Funciones trigonométricas

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

Actividades interactivas. Test de autoevaluación

Actividades de refuerzo
Actividades de ampliación

Prueba de evaluación

1. Calcula el término general de las siguientes sucesiones:

$$a) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad b) 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$$

$$a) s_1 = 1; s_2 = \frac{1}{2}; s_3 = \frac{1}{3}; s_4 = \frac{1}{4}; \dots \Rightarrow s_n = \frac{1}{n}$$

$$b) s_1 = \sqrt{1} = 1; s_2 = \sqrt{2}; s_3 = \sqrt{3}; s_4 = \sqrt{4} = 2; \dots \Rightarrow s_n = \sqrt{n}$$

2. Determina cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas o progresiones geométricas. Halla su término general.

$$a) -5, -2, 1, 4, \dots \quad c) 1, 5, 25, 125, \dots$$

$$b) \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots \quad d) 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \dots$$

$$a) \text{ Progresión aritmética cuyo término general es: } a_n = 3n - 8$$

$$b) \text{ Progresión geométrica cuyo término general es: } b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$c) \text{ Progresión geométrica cuyo término general es: } c_n = 5^{n-1}$$

$$d) \text{ Progresión aritmética cuyo término general es: } d_n = \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}$$

3. Halla el término a_{10} de una progresión geométrica de razón $\frac{2}{3}$, si $a_4 = \frac{81}{8}$.

$$a_{10} = a_4 \cdot r^6 = \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{8}{9}$$

4. Expresa, en radianes, el ángulo central de una circunferencia cuyo arco mide $\frac{2}{3}r$, siendo r el radio de la circunferencia.

$$\frac{2}{3}r \text{ corresponden a } \frac{2}{3} \text{ rad.}$$

5. Averigua los ángulos menores que 720° cuya tangente vale $-\frac{13}{5}$.

$$\arctg\left(-\frac{13}{5}\right) = -68,962^\circ. \text{ Por tanto, los ángulos serán } 111,038^\circ, 291,038^\circ, 471,038^\circ \text{ y } 651,038^\circ.$$

6. Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:

$$a) \sin \alpha = \frac{3}{5} \quad 90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$$

$$b) \cos \alpha = \frac{12}{13} \quad 270^\circ \leq \alpha < 360^\circ$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad 180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$$

$$a) \sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5} \quad \sec \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4} \quad \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$b) \sin \alpha = -\frac{5}{13} \quad \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{13}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13} \quad \sec \alpha = \frac{13}{12}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12} \quad \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{12}{5}$$

$$c) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sec \alpha = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \quad \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Funciones exponenciales (página 284)

En el archivo de GeoGebra se representa gráficamente la función exponencial $f(x) = ax + b + c$. Moviendo los deslizadores se pueden obtener las representaciones de las funciones transformadas por traslaciones verticales y horizontales de modo que puede comprobarse qué características son comunes en esta familia de funciones y cuáles cambian al mover la función.

Funciones logarítmicas (página 286)

En el archivo de GeoGebra se representa gráficamente la función logarítmica $f(x) = \log_a(x + b) + c$. Moviendo los deslizadores se pueden obtener las representaciones de las funciones transformadas por traslaciones verticales y horizontales de modo que puede comprobarse qué características son comunes en esta familia de funciones y cuáles cambian al mover la función.

Funciones trigonométricas (página 296)

En el archivo de GeoGebra aparecen las gráficas de las funciones sen x y cos x . Moviendo los deslizadores se pueden obtener las representaciones de las funciones transformadas por traslaciones verticales y horizontales de ambas, así como, con distintos periodos.

Actividades (páginas 283/294)

- 1** Halla la población de la colonia de bacterias del ejemplo anterior, al cabo de 12 h.

$$N(720) = 5\,000 \cdot 2^{720/20} = 5\,000 \cdot 2^{36} = 3,44 \cdot 10^{14} \text{ bacterias}$$

- 2** Utiliza la calculadora y obtén, con cuatro cifras exactas:

$$3^\pi, 2^{\sqrt{2}}, e^{-1/3} \text{ y } (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$$

31,54; 2,665; 0,7165; 1,633, respectivamente.

- 3** Ordena de menor a mayor.

$$2^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \frac{1}{2^2}, 2^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, (\sqrt{2})^{-3}, 2^{1/3}, (\sqrt[3]{2})^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{2^2} < (\sqrt{2})^{-3} < 2^{-1} < 2^0 < 2^{1/3} < (\sqrt[3]{2})^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

- 4** Sin realizar ningún cálculo, indica cuáles de los siguientes valores son mayores que 1.

$$(2,5)^{3/2}, (0,25)^5, (0,5)^{-3}, \left(\frac{3}{5}\right)^{-2/3} \text{ y } (1,4)^{-1,4}$$

$(2,5)^{3/2} > 1$, ya que la base es mayor que 1 y el exponente, positivo.

$(0,25)^5 < 1$, la base es menor que 1 y el exponente, positivo.

$(0,5)^{-3} = 2^3 > 1$, base mayor que 1 y exponente positivo.

$(3/5)^{-2/3} = (5/3)^{2/3} > 1$, base mayor que 1 y exponente positivo.

$(1,4)^{-1,4} = (1/1,4)^{1,4} < 1$, base menor que 1 y exponente positivo.

- 5** Sin realizar cálculos, determina el signo de x en las siguientes expresiones.

a) $2^x = 0,25$ **b)** $(0,25)^x = 0,05$ **c)** $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{75}{8}$

a) El exponente debe ser negativo, porque la base es mayor que la unidad y el resultado es menor que la unidad.

b) El exponente debe ser positivo, porque la base es menor que la unidad y el resultado es menor que la unidad.

c) El exponente debe ser negativo, porque la base es menor que la unidad y el resultado es mayor que la unidad.

- 6** Realiza estas operaciones.

a) $\left(\frac{1}{2} + 2^{-2}\right)^{-2}$

b) $\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2 - \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2\right]^{-2}$

a) $\left(\frac{1}{2} + 2^{-2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$

b) $\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2 - \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2\right]^{-2} =$
 $= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 - \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$
 $= \frac{64}{81} - \frac{16}{9} = \frac{64 - 144}{81} = -\frac{80}{81}$

- 7** Se desconoce el tipo de crecimiento de una especie de bacterias. Solo se sabe que este crecimiento es exponencial: a los 48 minutos del inicio de la experiencia hay 50 000 individuos, y a las dos horas, 3,2 millones. ¿Cuántos individuos había en la muestra inicial? ¿Cuál es su período de duplicación?

Con los datos se puede plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5 \cdot 10^4 = N_0 \cdot 2^{48/T} \\ 3,2 \cdot 10^6 = N_0 \cdot 2^{120/T} \end{cases}$$

Al dividir la segunda ecuación entre la primera, se obtiene:

$$64 = 2^{72/T} \Rightarrow 2^6 = 2^{72/T} \Rightarrow 6 = \frac{72}{T} \Rightarrow T = \frac{72}{6} = 12 \text{ min}$$

Su período de duplicación es de 12 minutos.

Si se despeja N_0 en la primera ecuación y se sustituye el valor de T , se obtiene:

$$N_0 = \frac{5 \cdot 10^4}{2^{48/12}} = \frac{5 \cdot 10^4}{2^4} = 3\,125 \text{ individuos}$$

Había 3 125 individuos.

- 8** Construye las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

b) $f(x) = e^x$ (con calculadora)

c) $f(x) = e^{-x}$

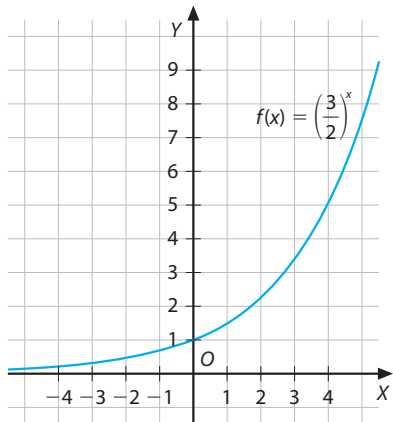
d) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Se puede elaborar una tabla con valores aproximados, como sigue:

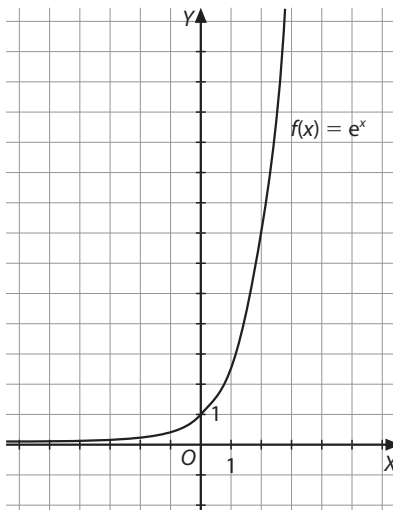
x	$y = (3/2)^x$	$y = e^x$	$y = e^{-x}$	$y = (3/2)^x + (2/3)^x$
-3	0,30	0,05	20,01	0,68
-2	0,44	0,14	7,39	2,69
-1	0,67	0,37	2,72	2,17
0	1	1	1	2
1	1,5	2,72	0,37	2,17
2	2,25	7,39	0,14	2,69
3	3,38	20,01	0,05	3,68
...	...	...	...	...

A continuación se elaboran las gráficas:

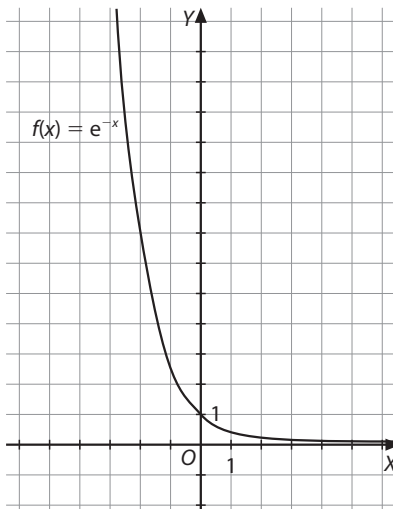
a)



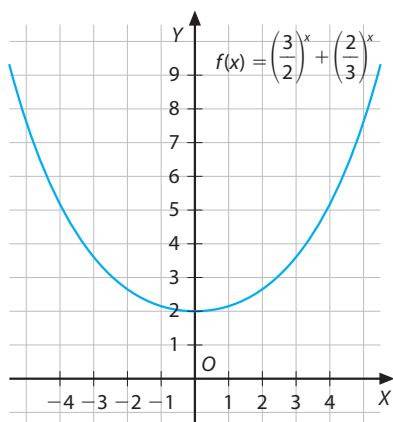
b)



c)



d)



- 9** La vida media del radio es, aproximadamente, 2 300 años. ¿Qué cantidad de este elemento radiactivo quedará al cabo de 1 000 años en una muestra de 3 g de masa?

$$N = N_0 \cdot e^{-t/T} \Rightarrow N = 3 \cdot e^{-1000/2300} = 1,94 \text{ g}$$

- 10** Calcula el incremento de capital que se obtiene en una inversión de capitalización continua al 6% de interés anual, si el capital inicial es de 2 millones de euros y el tiempo de la inversión es de 11 meses.

$$C = C_0 \cdot e^{it} \Rightarrow C = 2 \cdot 10^6 \cdot e^{0,06 \cdot 11/12} = 2\,113\,081,23 \text{ €}$$

$$B = 2\,113\,081,23 - 2\,000\,000 = 113\,081 \text{ €}$$

Por lo que el incremento es de 113 081 € aproximadamente.

- 11** Calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log_5 \sqrt{125}$

b) $\log_{1/2} 1\,024$

c) $\log_{\sqrt{3}} (1/27)$

d) $\log_{-5} 625$

a) $\log_5 \sqrt{125} = x \Rightarrow 5^x = 5^{3/2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

b) $\log_{1/2} 1\,024 = x \Rightarrow 2^{-x} = 2^{10} \Rightarrow x = -10$

c) $\log_{\sqrt{3}} (1/27) \Rightarrow 3^{x/2} = 3^{-3} \Rightarrow x = -6$

d) $\log_{-5} 625 = x \Rightarrow$ no existe solución.

- 12** Calcula x en estos logaritmos.

a) $\log_x (1/\sqrt[3]{49}) = -2/3$

b) $\log_{2/3} x = -1/2$

c) $\log_x \sqrt[3]{5} = 2/3$

a) $\log_x (1/\sqrt[3]{49}) = -2/3 \Rightarrow x^{-2/3} = 7^{-2/3} \Rightarrow x = 7$

b) $\log_{2/3} x = -1/2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/2} = x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

c) $\log_x \sqrt[3]{5} = 2/3 \Rightarrow x^{2/3} = 5^{1/3} \Rightarrow x = \sqrt{5}$

- 13** Indica cuál es la base de las funciones logarítmicas que cumplen:

a) $f(1/64) = 3$

b) $f(8/5) = -1/2$

c) $f(1/3) = -2$

a) $\log_b \left(\frac{1}{64}\right) = 3 \Rightarrow b^3 = 2^{-6} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$

b) $\log_b \left(\frac{8}{5}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow b^{-1/2} = \frac{8}{5} \Rightarrow b = \frac{25}{64}$

c) $\log_b \left(\frac{1}{3}\right) = -2 \Rightarrow b^{-2} = 3^{-1} \Rightarrow b = \sqrt{3}$

- 14** La constante de semidesintegración del C^{14} es de $3,8359 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$. Calcula su período de semidesintegración.

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Sustituyendo la constante de semidesintegración por su valor, y transformando el resultado en años, se obtiene:

$$T = 5\,730 \text{ años}$$

- 15** El período de semidesintegración del uranio 238 es de $4,51 \cdot 10^9$ años. ¿Cuál es su vida media?

$$V = \frac{T}{\ln 2}$$

Sustituyendo el período de semidesintegración por su valor se obtiene:

$$V = 6,51 \cdot 10^9 \text{ años}$$

- 16** La magnitud, M , de un terremoto, según la escala de Richter, y la energía, E , liberada en él, están relacionadas por la expresión: $M = (2/3) \cdot \log(E/E_0)$, donde E_0 es una constante que vale $2,5 \cdot 10^4$ julios.

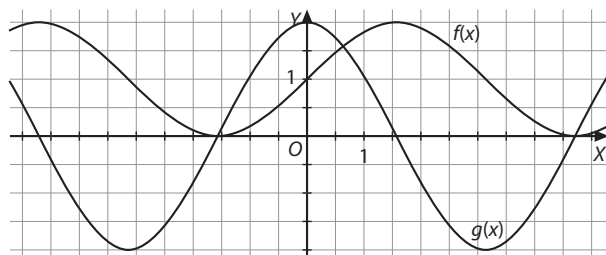
¿Qué energía liberó el terremoto de San Francisco producido en 1906, cuya magnitud fue de 8,25 según la escala de Richter?

Sustituyendo en la expresión los valores de la magnitud del terremoto y del valor de la constante, y aplicando propiedades de las operaciones con logaritmos, tenemos que:

$$8,25 \cdot \frac{3}{2} = \log E - \log 2,5 \cdot 10^4 \Rightarrow \log E = 16,772\,94\dots$$

$$\Rightarrow E = 5,93 \cdot 10^{16} \text{ J}$$

- 17** Representa las funciones $f(x) = \sin x + 1$ y $g(x) = 2\cos x$, e indica el recorrido de cada una de ellas.



- $\text{Rec } f = [0, 2]$
- $\text{Rec } g = [-2, 2]$

- 18** Calcula $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin x - \cos x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin x - \cos x) = \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

- 19** A partir de la representación gráfica de $f(x) = \text{tg } x$, calcula:

- a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\text{tg } x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} (\text{tg } x)$
a) $+\infty$ b) $-\infty$

- 20** Averigua el dominio de la función $f(x) = \text{tg}(x + \pi/2)$.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0 \pm k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- 21** Calcula $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (-2\text{tg } x)$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (-2\text{tg } x) = -2 \cdot (+\infty) = -\infty$$

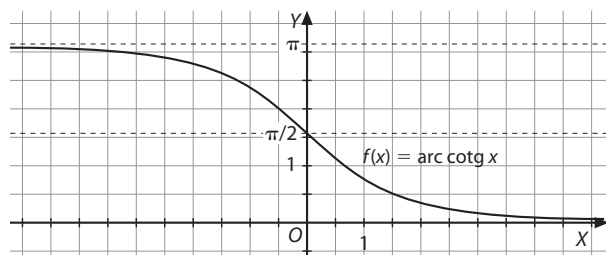
- 22** ¿Cuál es el período de la función $f(x) = \cos 3x$?

$$\cos(3x + 2\pi) = \cos\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow T = 2\pi/3$$

- 23** A partir de la representación gráfica de $f(x) = \cotg x$, indica:

- a) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\cotg x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} (\cotg x)$
a) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\cotg x) = -\infty$
b) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} (\cotg x) = +\infty$

- 24** Representa la función de ecuación $f(x) = \text{arc cotg } x$, indicando su dominio y su recorrido.



- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- $\text{Rec } f = (0, \pi)$

- 25** Dada la función $f(x) = \cos(\text{arc cos } x)$, calcula $f(1)$, $f(-1/2)$ y $f(\sqrt{3}/2)$.

$$f(1) = 1, f(-1/2) = -1/2 \text{ y } f(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/2.$$

- 26** Dadas dos funciones, $f(x) = \text{arc sen } x$ y $g(x) = \cos x$, averigua la expresión de las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

- $(g \circ f)(x) = g(\text{arc sen } x) = \cos(\text{arc sen } x) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arc sen } x)} = \sqrt{1 - x^2}$
- $(f \circ g)(x) = f(\cos x) = \text{arc sen}(\cos x) = \text{arc sen}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x$

Ejercicios y problemas (páginas 298/300)

Función exponencial

- 1** Calcula.

a) $\frac{(0,1)^{-3} \cdot 2^2}{2^{-1} \cdot 10^2}$

b) $\frac{2 \cdot 2^{1/3}}{(2^{-1/3})^2}$

a) $\frac{(0,1)^{-3} \cdot 2^2}{2^{-1} \cdot 10^2} = \frac{10^3 \cdot 2^2 \cdot 2}{10^2} = 10 \cdot 2^3 = 80$

b) $\frac{2 \cdot 2^{1/3}}{(2^{-1/3})^2} = \frac{2^{4/3}}{2^{-2/3}} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$

- 2** Ordena de menor a mayor en cada caso.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

b) $\pi^{-3/2}, \pi^{-1}, \pi^{-1/2}$

c) $(0,2)^{4/3}, (0,2)^{5/3}, (0,2)^2, 2^{-1/2}, 2^{-1}, 2^{-2}$

d) $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

b) $\pi^{-3/2} < \pi^{-1} < \pi^{-1/2}$

c) $(0,2)^2 < (0,2)^{5/3} < (0,2)^{4/3} < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^{-1/2}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$

- 3** A partir de la función $f(x) = (\sqrt{3})^x$, calcula.

$$f(0), f(-3), f(-2), f(4), f(6), f^{-1}(9), f^{-1}\left(\frac{1}{27}\right) \text{ y } f^{-1}(-3)$$

$$f(0) = 1, f(-3) = \frac{1}{3\sqrt{3}}, f(-2) = \frac{1}{3},$$

$$f(4) = 9, f(6) = 27, f^{-1}(9) = 4,$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{27}\right) = -6, \nexists f^{-1}(-3)$$

- 4** Dada la función $f(x) = 3^x$, calcula las antiimágenes de $\frac{1}{27}$, $0,3$, $\sqrt[3]{9}$, 10 y 7 .

$$\frac{1}{27} = 3^x \Rightarrow 3^{-3} = 3^x \Rightarrow x = -3$$

$$0,3 = \frac{1}{3} = 3^x \Rightarrow 3^{-1} = 3^x \Rightarrow x = -1$$

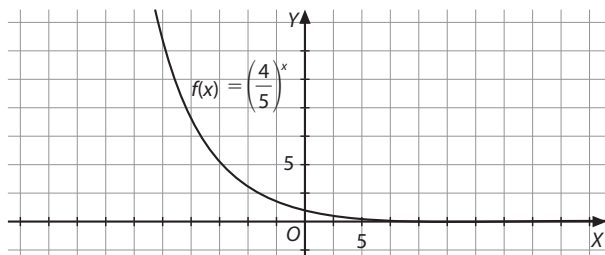
$$\sqrt[3]{9} = 3^{2/3} = 3^x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$10 = 3^x \Rightarrow \log 10 = x \log 3 \Rightarrow x = \frac{1}{\log 3}$$

$$7 = 3^x \Rightarrow \ln 7 = x \ln 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln 3}$$

- 5** Utilizando la calculadora construye una tabla de valores para la función $f(x) = (4/5)^x$, ¿es una función creciente o decreciente?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	125/64	25/16	5/4	1	4/5	16/25	64/125



La gráfica es decreciente puesto que la base de la función exponencial representada es menor que la unidad.

- 6** Las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$ tienen todas un punto en común, ¿cuál es este punto?

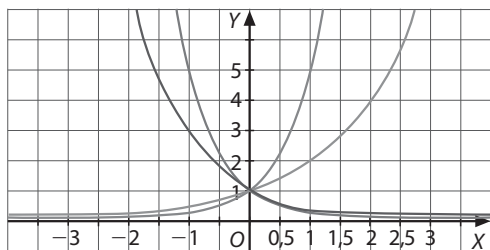
El punto (0, 1).

- 7** ¿Para qué valores de a es creciente $f(x) = a^x$?, ¿para cuáles es decreciente?

Es creciente para $a > 1$ y es decreciente para $a < 1$.

- 8** Utilizando las propiedades de la función exponencial, indica a qué expresión corresponden las gráficas siguientes:

a) $f(x) = 2^x$ **b)** $f(x) = (1/3)^x$ **c)** $f(x) = 5^x$ **d)** $f(x) = (1/5)^x$



¿Cuál es el dominio y el recorrido de las funciones representadas? ¿Cuáles son crecientes? ¿Cuáles decrecientes?

Todas las funciones tienen el mismo dominio y recorrido:

■ Dom $f = \mathbb{R}$

■ Rec $f = (0, +\infty)$

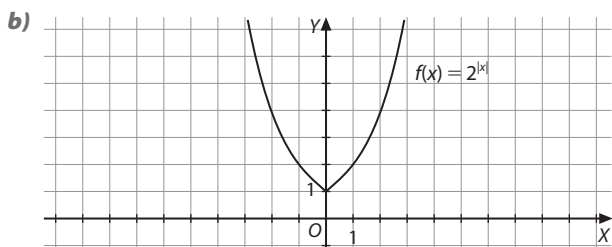
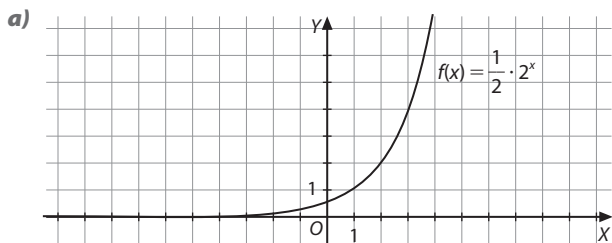
Son crecientes **a)** y **c)** y decrecientes las otras.

La función $f(x) = 2^x$ corresponde a la amarilla; $f(x) = (1/3)^x$, a la roja; $f(x) = 5^x$, a la azul, y $f(x) = (1/5)^x$, a la verde.

- 9** Construye las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (1/2) \cdot 2^x$

b) $f(x) = 2^{|x|}$



- 10** Sin dibujar la gráfica, indica las características de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 0,2^x$

c) $f(x) = -2 \cdot 2^{-x}$

b) $f(x) = -2 \cdot 3^x$

d) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$

a) Es una función decreciente y siempre positiva.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,2^x = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} 0,2^x = +\infty$$

b) Es una función decreciente y siempre negativa.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \cdot 3^x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 \cdot 3^x) = 0$$

c) Es una función creciente y siempre negativa.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \cdot 2^{-x}) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 \cdot 2^{-x}) = -\infty$$

d) Es una función decreciente y siempre positiva.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \cdot 2^{-x}) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 \cdot 2^{-x}) = +\infty$$

- 11** Averigua el punto de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = 2^x$.

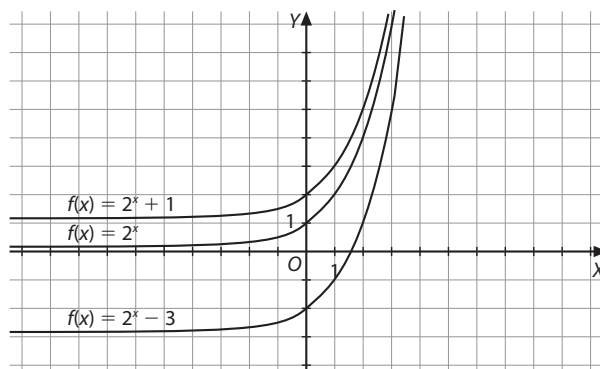
Para hallar el punto de intersección, se resuelve la ecuación: $3^x = 2^x$

Para ello, hay que tomar logaritmos en ambos miembros de la ecuación: $x \ln 3 = x \ln 2$

$x (\ln 3 - \ln 2) = 0$, por lo que $x = 0$, y entonces, $y = 1$.

Por tanto, se cortan en el punto (0, 1).

- 12** Utilizando la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, representa gráficamente la función $f(x) = 2^x + 1$ y $f(x) = 2^x - 3$.



- 13** De la función exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ sabemos que pasa por (0, 2) y (3, 54). Determina los valores de a y k .

Al sustituir los puntos en la función obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$(0, 2) \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow k \cdot a^0 = 2 \Rightarrow k = 2$$

$$(3, 54) \Rightarrow f(3) = 54 \Rightarrow 2 \cdot a^3 = 54 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

- 14** Calcula k y a en la función $f(x) = k \cdot a^x$, sabiendo que se cumple lo siguiente.

a) $f(3) = 6$ y $f(8) = 192$

b) $f(-1) = 1/6$ y $f(-3/2) = 1/18$

c) $f(1) = 12$ y $f(3) = 192$

$$\textbf{a)} \quad f(3) = 6 \text{ y } f(8) = 192 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4} \cdot 2^x$$

$$\textbf{b)} \quad f(-1) = 1/6 \text{ y } f(-3/2) = 1/18 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \cdot 9^x$$

$$\textbf{c)} \quad f(1) = 12 \text{ y } f(3) = 192 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot 4^x$$

- 15** Cuando se afirma que la inflación anual es del 3,2 %, se está indicando que un producto cuyo valor sea, por ejemplo, de 100 € al inicio del año, valdrá 103,20 € a su término. Calcula cuánto habrá que pagar dentro de 4 años por una vivienda que cuesta actualmente 137 000 €, si se supone una inflación anual constante del 3,2 %.

$$P = 137\,000 (1 + 0,032)^4 = 155\,395,83 \text{ €}$$

- 16** Considerando la misma inflación que en la actividad anterior, calcula el precio que tenía una vivienda hace cuatro años si actualmente cuesta 200 000 €.

$$200\,000 = P_0 (1 + 0,032)^4 \Rightarrow P_0 = 176\,323,91 \text{ €}$$

Función logarítmica

- 17** Escribe las siguientes igualdades como una expresión logarítmica.

a) $6^{-1} = 1/6$

c) $7^{-3} = 1/343$

b) $(4/9)^{1/2} = 2/3$

d) $(\sqrt{2})^{-4} = 1/4$

a) $\log_6 (1/6) = -1$

b) $\log_{4/9} (2/3) = 1/2$

c) $\log_7 (1/343) = -3$

d) $\log_{\sqrt{2}} (1/4) = -4$

- 18** Calcula la base de los siguientes logaritmos.

a) $\log_x 1/4 = -2$

b) $\log_x \sqrt[3]{625} = 4/3$

c) $\log_x \sqrt{1/32} = 5/2$

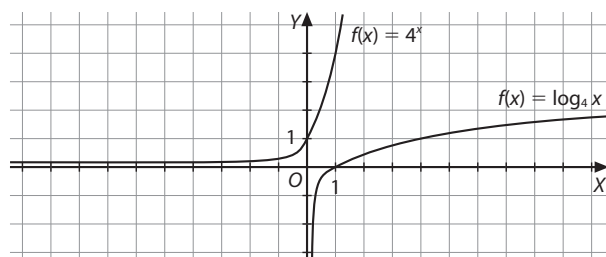
a) $x^{-2} = (1/2)^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

b) $x^{4/3} = 5^{4/3} \Rightarrow x = 5$

c) $x^{5/2} = (1/2)^{5/2} \Rightarrow x = 1/2$

- 19** Haz una tabla de valores para la función $f(x) = 4^x$ y a partir de esos valores representa la función $f(x) = \log_4 x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1/64	1/16	1/4	1	4	16	64



- 20** Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_a x$ tienen todas un punto en común, ¿cuál es este punto?

El punto (1, 0).

- 21** ¿Para qué valores de a es creciente $f(x) = \log_a x$?, ¿para cuáles es decreciente?

La función logarítmica es creciente para $a > 1$ y es decreciente para $0 < a < 1$.

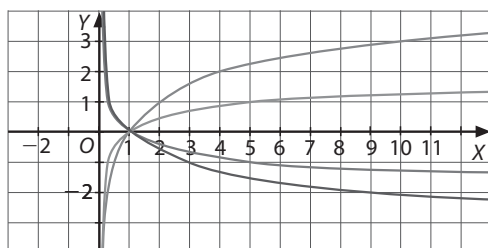
- 22** Utilizando las propiedades de la función logarítmica, indica a qué expresión corresponden las gráficas:

a) $f(x) = \log_2 x$

c) $f(x) = \log_{1/5} x$

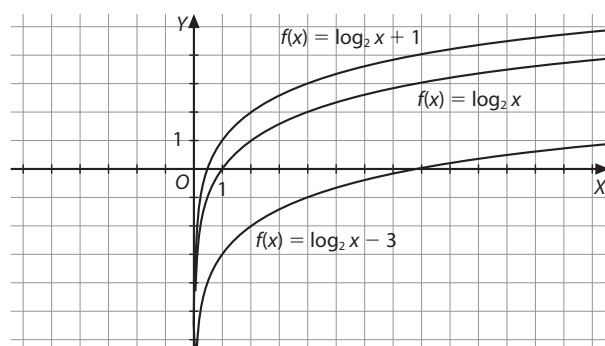
b) $f(x) = \log_{1/3} x$

d) $f(x) = \log_5 x$



La función $f(x) = \log_2 x$ corresponde a la azul; $f(x) = \log_{1/3} x$, a la roja; $f(x) = \log_{1/5} x$, a la verde, y $f(x) = \log_5 x$, a la amarilla.

- 23** Utilizando la gráfica de $f(x) = \log_2 x$, representa la función $f(x) = \log_2 x + 1$ y $f(x) = \log_2 x - 3$.



- 24** Si a y b son dos números reales, positivos y mayores que 1, y $\log_a 3 < \log_b 3$, ¿qué relación existe entre a y b ?

$a > b$

- 25** Sea $f(x) = \log_{1/2} x$ y $g(x) = \log_{1/3} x$ y $f(a) < g(b)$. ¿Qué se debe cumplir: $a > b$ o $a < b$?

$a > b$

- 26** Representa estas funciones.

a) $f(x) = \log x$

c) $g(x) = \log |x|$

b) $i(x) = \log x^2$

d) $h(x) = |\log x|$

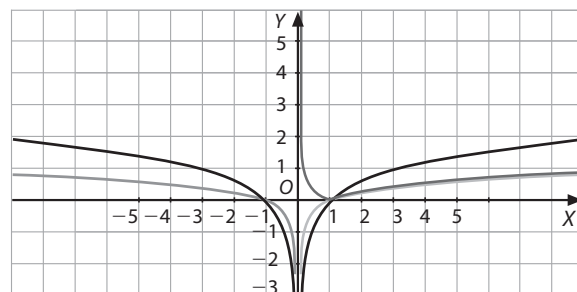
a) Dom $f = (0, +\infty)$

c) Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

b) Dom $i = \mathbb{R} - \{0\}$

d) Dom $h = (0, +\infty)$

x	$\log x$	$\log x^2$	$\log x $	$ \log x $
-10	—	2	1	—
-5	—	1,40	0,70	—
-4	—	1,20	0,60	—
-3	—	0,95	0,48	—
-2	—	0,60	0,30	—
-1	—	0	0	—
-0,5	—	-0,60	-0,30	—
-0,1	—	-2	-1	—
0,1	-1	-2	-1	1
0,5	-0,30	-0,60	-0,30	0,30
1	0	0	0	0
2	0,30	0,60	0,30	0,30
3	0,48	0,95	0,48	0,48
4	0,60	1,20	0,60	0,60
5	0,70	1,40	0,70	0,70
10	1	2	1	1



- 27** Un gramo de una sustancia radiactiva, que se desintegra exponencialmente, se reduce en un 18 % en 8 años. Calcula su vida media y su período de semidesintegración.

$$0,18 = e^{-8/V}$$

$$\ln 0,18 = \frac{-8}{V} \Rightarrow \text{Su vida media es: } V = 4,67 \text{ años}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-T/V} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{T}{V} \Rightarrow T = -V \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3,23 \text{ años es su período de semidesintegración.}$$

- 28** Durante un cierto período, la demanda de café queda ajustada a la función $D = 1600 \cdot e^{-0,1t}$, donde t indica el número de meses, y D , la cantidad de kilos de café vendidos. Calcula cuándo se reducirá la demanda a la mitad.

$$D = 1600 \cdot e^{-0,1t}$$

$$800 = 1600 \cdot e^{-0,1t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-0,1t} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,1t$$

Así, $t = 6$ meses y 28 días aproximadamente.

- 29** La concentración de iones de hidronio de una solución jabonosa es $3,1 \cdot 10^{-6}$ moles/L. ¿Cuál es su pH?

$$\text{pH} = -\log 3,1 \cdot 10^{-6} = -\log 3,1 + 6 = 5,51$$

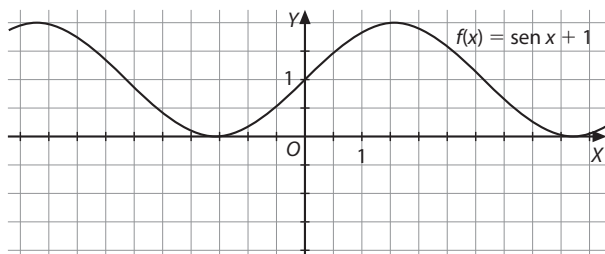
- 30** Un fenómeno natural se mide mediante una constante que se calcula a partir de la expresión $k = \log(I/I_0)$. Si la intensidad es I_0 , entonces $k = 0$, por lo que dicha intensidad se considera normal. Calcula la intensidad relativa del fenómeno cuando $k = \ln 2$.

$$\ln 2 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow 10^{\ln 2} = \frac{I}{I_0}$$

$$\text{Por tanto, } \frac{I}{I_0} = 4,93.$$

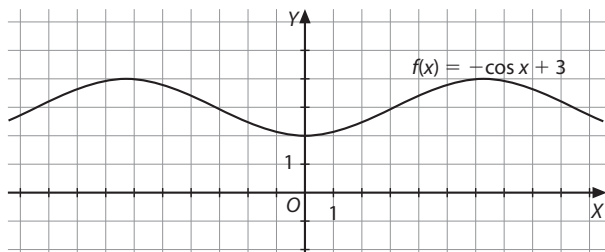
Funciones trigonométricas

- 31** Representa $f(x) = \sin x + 1$ e indica su período.



$$T = 2\pi$$

- 32** Representa $f(x) = -\cos x + 3$ e indica su período.



$$T = 2\pi$$

- 33** Dadas las funciones $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos x + 2$ y $h(x) = \cos x - 3$, determina su dominio y su recorrido.

Las tres funciones f , g y h tienen como dominio $\mathbb{R}$.

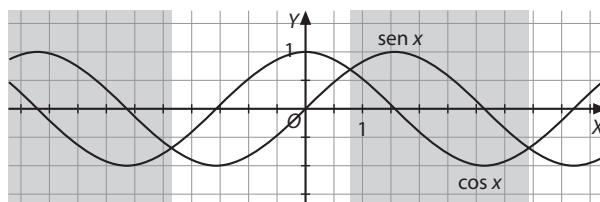
■ $\text{Rec } f = [-1, 1]$

■ $\text{Rec } g = [1, 3]$

■ $\text{Rec } h = [-4, -2]$

- 34** ¿Para qué valores de x se cumple que $\sin x > \cos x$?

$\sin x > \cos x$ para aquellos valores de x en que la gráfica de la función seno está por encima de la gráfica de la función coseno.



Por tanto, la función seno es estrictamente mayor que la función coseno en los siguientes intervalos:

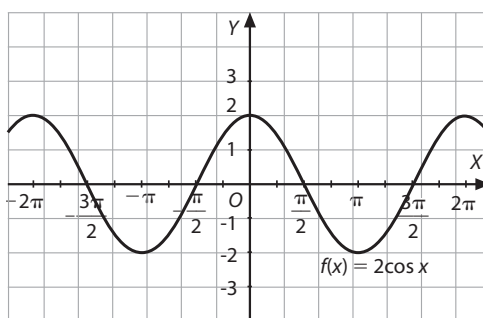
$$\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right), \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

- 35** Representa las siguientes funciones e indica si son periódicas y qué período tienen:

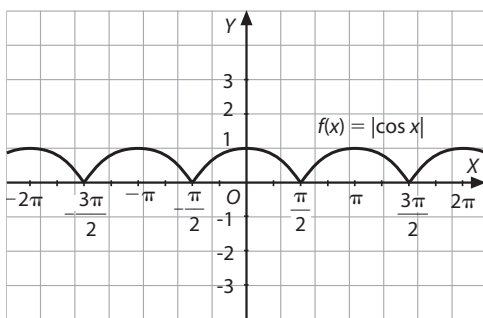
a) $f(x) = 2 \cos x$

b) $f(x) = |\cos x|$

a) Es periódica, de período 2π .



b) Es periódica, de período π .



- 36** Halla $f \circ g$, siendo $f(x) = \arccos x$, y siendo:

a) $g(x) = \sin x$

b) $g(x) = \cos 2x$

a) $(f \circ g)(x) = f(\sin x) = \arccos(\sin x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

b) $(f \circ g)(x) = f(\cos 2x) = \arccos(\cos 2x) = 2x$

- 37** Un movimiento oscilatorio tiene la siguiente ecuación $x(t) = 10 \sin(\pi t + \pi/4)$, siendo x la desviación respecto del punto de equilibrio medida en centímetros respecto del tiempo, t , medido en segundos.

a) Averigua el período de esta función.

b) ¿Cuánto tarda en realizar una oscilación completa?

c) Averigua la desviación máxima respecto del punto de equilibrio.

d) ¿Cuál es el tiempo mínimo que tarda en llegar a su máxima desviación?

e) Determina la desviación inicial, es decir, $x(0)$.

a) 2 s

c) 10 cm

e) $x(0) = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ cm}$

b) 0,5 s

d) $t = 0,25 \text{ s}$

38 Calcula:

a) $\sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$

c) $\arcsin(\cos x)$

a) $\sin\left(\arccos \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

b) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$

Ejercicios de aplicación

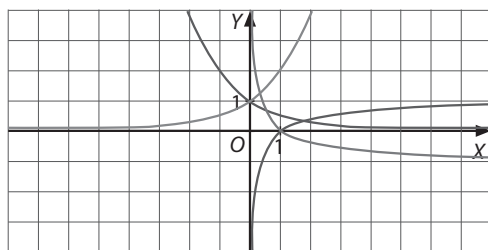
39 En la figura tienes representadas las funciones:

a) $f(x) = a^x, a > 1$

b) $f(x) = a^x, 0 < a < 1$

c) $f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$

d) $f(x) = \log_a x, a > 1$



Identifícalas e indica el dominio y el recorrido de cada una de las funciones y si son crecientes o decrecientes.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Rec } f = (0, +\infty)$. Función creciente en todo su dominio.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Rec } f = (0, +\infty)$. Función decreciente en todo su dominio.

c) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$; $\text{Rec } f = \mathbb{R}$. Función decreciente en todo su dominio.

d) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$; $\text{Rec } f = \mathbb{R}$. Función creciente en todo su dominio.

La función $f(x) = a^x, a > 1$ corresponde a la azul; $f(x) = a^x, 0 < a < 1$, a la roja; $f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$, a la verde, y $f(x) = \log_a x, a > 1$, a la naranja.

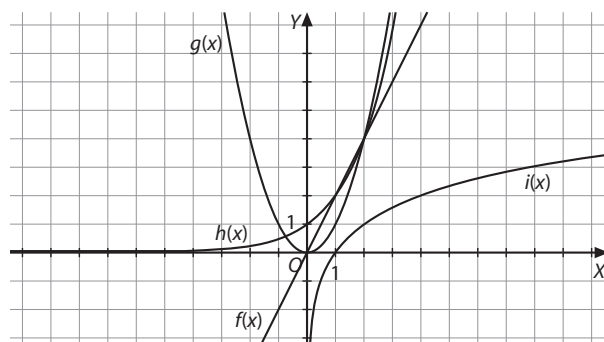
40 Dibuja en unos mismos ejes de coordenadas las gráficas de las funciones.

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = x^2$

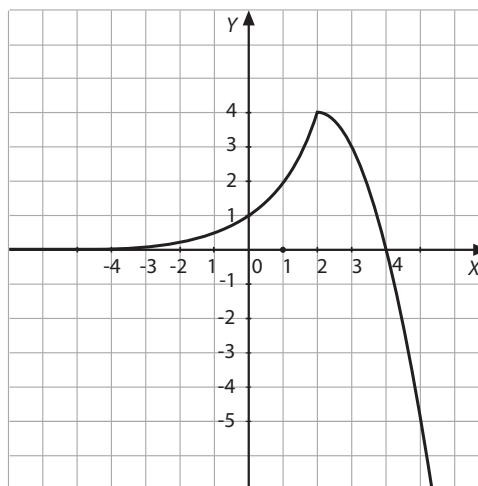
c) $h(x) = 2^x$

d) $i(x) = \log_2 x$



41 Dibuja esta función, e indica si es continua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



Es continua en $x = 2$: $f(2) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2^x = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$$\Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

42 Estudia si la siguiente función es continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x + \pi) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^3 - x}{2x^2 + x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. En $x = -\frac{1}{2}$ hay discontinuidad asintótica.

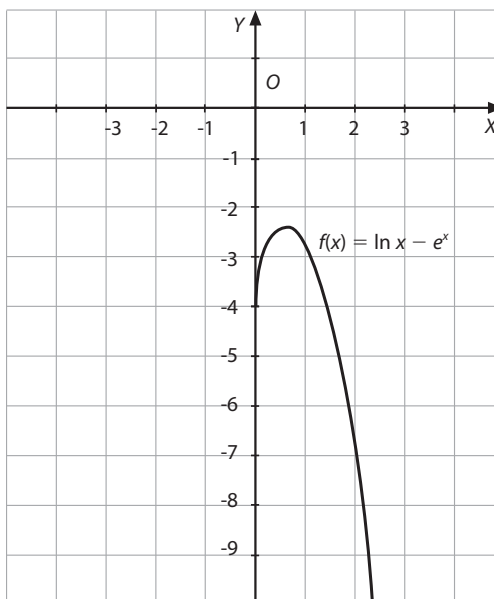
En el punto $x = 0$, de unión de las dos ramas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)(x-1)}{x(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)} = -1$$

Por tanto, como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$, en $x = 0$ es continua.

43 Representa $f(x) = \ln x - e^x$.



44 Calcula el punto donde se cortan las gráficas de las siguientes funciones.

$$f(x) = e^x \text{ y } g(x) = \ln x$$

Las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$ no se cortan nunca, es decir, $e^x \neq \ln x, \forall x \in \mathbb{R}$.

45 Construye las tablas de valores y representa estas funciones.

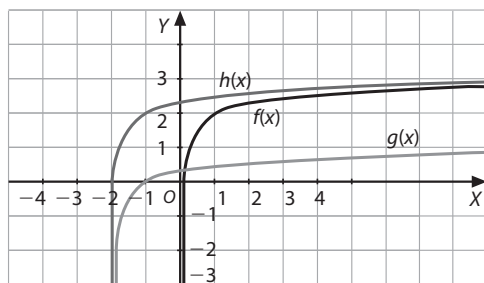
$$f(x) = 2 + \log x, \quad g(x) = \log(x+2), \quad h(x) = 2 + \log(x+2)$$

$$\text{Dom } f = (0, +\infty)$$

$$\text{Dom } g = (-2, +\infty)$$

$$\text{Dom } h = (-2, +\infty)$$

x	$2 + \log x$	$\log(x+2)$	$2 + \log(x+2)$
-1,9	—	-1	1
-1,5	—	-0,30	1,70
-1,25	—	-0,12	1,90
-1	—	0	2
0	—	0,30	2,30
0,5	1,70	0,40	2,40
1	2	0,48	2,48
2	2,30	0,60	2,60
3	2,48	0,70	2,70
4	2,60	0,78	2,78
5	2,70	0,85	2,85



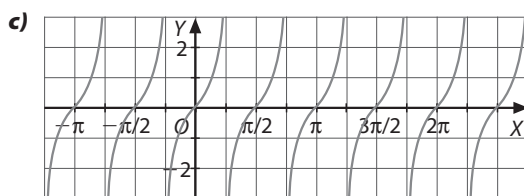
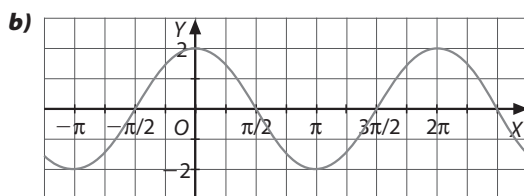
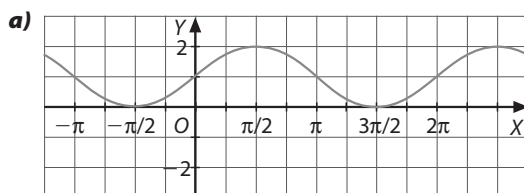
46 Dada la función $f(x) = \ln x$, determina para qué valores de x se cumple que $2 < f(x) < 4$.

$$\ln x = 2 \text{ si } x = e^2$$

$$\ln x = 4 \text{ si } x = e^4$$

$$\text{Es decir, } 2 < \ln x < 4 \text{ si } e^2 < x < e^4.$$

47 Identifica las funciones, indicando su período.



a) $f(x) = \sin x + 1; T = 2\pi$

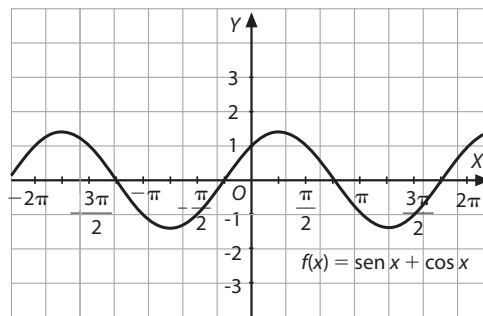
b) $f(x) = 2\cos x; T = 2\pi$

c) $f(x) = \tan 2x; T = 0,5\pi$

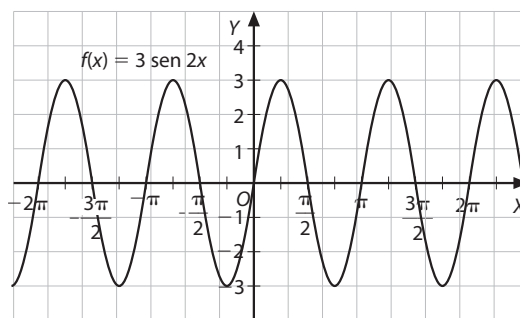
48 Representa las siguientes funciones e indica si son periódicas y qué período tienen.

a) $f(x) = \sin x + \cos x$ **b)** $f(x) = 3 \sin 2x$

a) Es periódica, de período 2π .



b) Es periódica, de período π .



49 Calcula los dominios de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \log(x^2 + x - 6)$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2-x}\right)$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-3}}$

d) $f(x) = \frac{2x}{1 - \ln x}$

a) $f(x) = \log(x^2 + x - 6)$

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 > 0\} = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

$$x^2 + x - 6 = (x+3) \cdot (x-2)$$

	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	—	+	+	
$x-2$	—	—	+	
$(x+3)(x-2)$	+	—	+	

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2-x}\right)$

$$\text{Dom } f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+3}{2-x} > 0\right\} = (-3, 2)$$

	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	—	+	+	
$2-x$	+	+	—	
$(x+3)(2-x)$	—	+	—	

c) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-3}}$

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ y } x-3 > 0\} = (3, +\infty)$$

d) $f(x) = \frac{2x}{1 - \ln x}$

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ y } \ln x \neq 1\} = (0, e) \cup (e, +\infty)$$

50 Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2}{\sin x}$

b) $f(x) = \log(1 + \cos x)$

a) $f(x) = \frac{2}{\sin x}$

$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\}$

$\sin x = 0$ si $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $f(x) = \log(1 + \cos x)$

$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + \cos x > 0\}$

$\cos x > -1$ si $\cos x \neq -1$

Dado que $\cos x = -1$ si $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

51 Halla la inversa de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2(e^x - 1)$

b) $f(x) = \sqrt{-\ln x}$

c) $f(x) = 5 \cdot 7^{x-4}$

d) $f(x) = 5 + 7^x$

a) $f(x) = 2 \cdot (e^x - 1)$

Para averiguar su inversa, primero se debe determinar si es inyectiva: e^x es una función inyectiva, como se deduce a partir de su gráfica.

La representación de la función $e^x - 1$ es la misma que la de e^x , pero trasladada una unidad en sentido negativo. Sigue siendo inyectiva. Al multiplicar por dos, se duplican las ordenadas para cada valor de x , por lo que la función se estira, y sigue siendo inyectiva.

Por tanto, se puede calcular su inversa, que será una función definida a partir del recorrido de $f(x) = 2 \cdot (e^x - 1)$, que es $(-2, +\infty)$, y cuyo recorrido será $\mathbb{R}$.

$y = 2 \cdot (e^x - 1) \Rightarrow x = 2 \cdot (e^y - 1) \Rightarrow e^y = \left(\frac{x}{2}\right) + 1$

$\Rightarrow y = \ln \left[\frac{x}{2} + 1\right]$

Es decir, la función buscada es $f^{-1}(x) = \ln \left[\frac{x}{2} + 1\right]$, cuyo

dominio es $(-2, +\infty)$ y su recorrido es $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sqrt{-\ln x}$

Esta función está definida en $(0, 1]$, y su recorrido es $\mathbb{R}^+$. En su dominio es inyectiva, y por tanto se puede calcular su inversa.

$f(x) = \sqrt{-\ln \left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow y = \sqrt{-\ln \left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow x = \sqrt{-\ln \left(\frac{1}{y}\right)}$

$\Rightarrow x^2 = -\ln \left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow e^{x^2} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = e^{-x^2}$

La función buscada es $f^{-1}(x) = e^{-x^2}$, su dominio debe ser $\mathbb{R}^+$ y su recorrido, $(0, 1]$.

El dominio es aparentemente $\mathbb{R}$, pero no hay que olvidar que esta función surge al hacer la inversa de otra cuyo recorrido solo puede ser $\mathbb{R}^+$.

c) $y = 5 \cdot 7^{x-4} \Rightarrow x = 5 \cdot 7^{y-4} \Rightarrow \frac{x}{5} = 7^{y-4} \Rightarrow \log \frac{x}{5} = 7^{y-4}$

$\Rightarrow \log \frac{x}{5} = (y - 4) \log 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\log(x/5)}{\log 7} + 4$

d) $y = 5 + 7^x \Rightarrow x = 5 + 7^y \Rightarrow x - 5 = 7^y \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(x - 5) = y \log 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\log(x - 5)}{\log 7}$

52 Calcula los ceros de las siguientes funciones e indica qué sucederá cuando $x \rightarrow +\infty$.

a) $f(x) = 1/2 - e^{-2x}$ **b)** $f(x) = 1 - 2e^{-2x}$

a) $f(x) = 0$ si $1/2 = e^{-2x} \Rightarrow -2x = \ln(1/2) \Rightarrow x = \ln \sqrt{2}$

b) $f(x) = 0$ si $2 \cdot e^{-2x} = 1 \Rightarrow 1/2 = e^{-2x} \Rightarrow -2x = \ln(1/2) \Rightarrow x = \ln \sqrt{2}$

Cuando x tiende a $+\infty$:

a) $f(x)$ tiende a $1/2$.

b) $f(x)$ tiende a 1 .

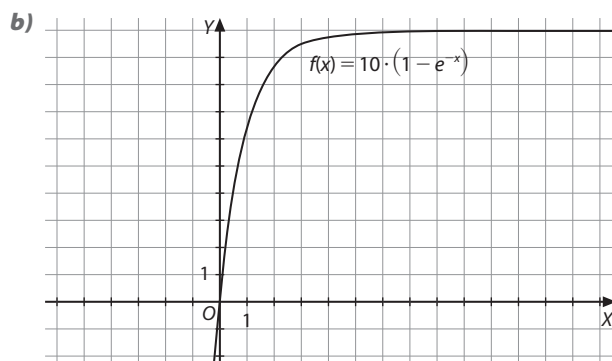
53 La función $f(x) = a \cdot (1 - e^{-kx})$ tiene una representación denominada curva de aprendizaje.

a) Calcula para qué valor de x se cumple que $f(x) = a/2$.

b) Representa la función si $a = 10$ y $k = 1$. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ¿Qué se observa?

a) $a/2 = a(1 - e^{-kx}) \Rightarrow 1/2 = 1 - e^{-kx} \Rightarrow -kx = \ln(1/2)$

$\Rightarrow x = \frac{\ln 2}{k}$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} 10(1 - e^{-kx}) = 10$

Así, la función no alcanza valores mayores de 10.

54 La población de un estado es, en millones de habitantes, $P(t) = 20/(4e^{-t/100} + 1)$, siendo t el tiempo medido en años. Calcula la población actual y estudia si se estabilizará con el paso del tiempo.

Población actual de 4 millones de habitantes y se estabiliza hacia 20 millones con el paso del tiempo.

55 Una magnitud física varía con el paso del tiempo t según la función: $M(t) = 100 - 20e^{2t}$ con $t \geq 0$ donde el tiempo, t , está dado en horas.

a) Calcula el valor inicial de dicha magnitud.

b) La magnitud $M(t)$, ¿aumenta o disminuye con el paso del tiempo?

c) ¿Cuándo será nula la magnitud M ?

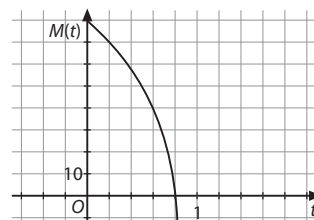
d) Representa la función $M(t)$.

a) $M(0) = 100 - 20e^0 = 80$

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} (100 - 20e^{2t}) = 100 - 20 \cdot (+\infty) = -\infty$ la función decrece, la magnitud decrece con el paso del tiempo.

c) $M(t) = 0$ si $100 = 20e^{2t} \Rightarrow e^{2t} = 5 \Rightarrow 2t = \ln 5 \Rightarrow t = \ln 5/2$
 $t = 48 \text{ min } 17 \text{ s}$

d) El dominio es $[0, +\infty)$; es una función decreciente; los puntos de corte con los ejes son $(0, 80)$ y $(0,805; 0)$.



- 56** Entre 1975 y 1995, el promedio del índice de crecimiento anual de la población mundial fue de 1,73 %. Si se estimaba que la población mundial en 1975 era de 4 079 millones de personas, ¿qué población puede estimarse en el año 1995? Por otro lado, se prevé que la población mundial ascenderá, en el año 2025, a 8 427 millones de personas. ¿Cuál será entonces el promedio anual de crecimiento de la población?

$$P = 4\,079 \cdot (1 + 0,0173)^{20} = 5\,748,24$$

La población estimada para 1995 es de 5 748,24 millones de personas.

$$\text{Por otra parte: } 8\,427 = 4\,079 \cdot (1 + t)^{50}$$

$$\frac{8\,427}{4\,079} = (1 + t)^{50} \Rightarrow \log\left(\frac{8\,427}{4\,079}\right) = 50 \cdot \log(1 + t)$$

$$\Rightarrow 1 + t = 1,0146 \Rightarrow t = 0,0146$$

Por tanto, el crecimiento promedio anual es del 1,46 %.

- 57** Se sabe que cuando se administra un fármaco a un enfermo la concentración en sangre disminuye exponencialmente en función del tiempo. También se sabe que para un fármaco determinado la concentración en sangre en función del tiempo es $C(t) = 0,6 \cdot (0,85)^t$, donde $C(t)$ es la concentración en mg cuando han pasado t horas desde la administración.

a) ¿Cuál es la dosis inicial?

b) ¿Qué concentración tendrá el paciente a las dos horas? ¿Y a las cinco?

c) Es importante que la concentración no baje de 0,31 mg. ¿Cada cuánto tiempo se deberá administrar el fármaco?

a) $C(0) = 0,6 \cdot (0,85)^0 = 0,6 \text{ mg}$

b) $C(2) = 0,6 \cdot (0,85)^2 = 0,4335 \text{ mg}$

$$C(5) = 0,6 \cdot (0,85)^5 = 0,266 \text{ mg}$$

c) $0,31 = 0,6 \cdot (0,85)^t \Rightarrow \frac{0,31}{0,6} = 0,85^t$
 $\Rightarrow \log \frac{0,31}{0,6} = t \cdot \log 0,85 \Rightarrow t = 4 \text{ h}$

- 58** Un producto se lanza al mercado con una previsión de ventas para las veinte primeras semanas determinada por la función $N(t) = 1\,500 e^{0,25t}$, donde N es el número de unidades que se prevé vender y t el tiempo en semanas. Determina la expresión que refleja el tiempo transcurrido en función de las unidades vendidas y haz una estimación de cuántas semanas han de pasar para que se hayan vendido 10 000 unidades.

$$t(N) = \frac{\ln(N/1\,500)}{0,25}$$

$$t(10\,000) = \frac{\ln(10\,000/1\,500)}{0,25} = 7,6 \text{ semanas}$$

- 59** Suponemos que una persona después de beber durante una cena, llega a una tasa de alcoholemia en sangre de 1,1 g/L. A partir de este momento deja de beber y la concentración baja progresivamente siguiendo la función $f(t) = 1,1 \cdot 0,65^t$, donde t representa el tiempo en horas. Calcular las horas que se deberá esperar para tener una tasa de alcoholemia de 0,2 mg/L.

$$f(t) = 1,1 \cdot 0,65^t$$

$$0,2 = 1,1 \cdot 0,65^t \Rightarrow 0,18 = 0,65^t \Rightarrow \frac{\ln 0,18}{\ln 0,65} = t$$

$$\Rightarrow t = 3,957$$

Aproximadamente 4 horas.

- 60** El nivel de intensidad de una onda sonora se define como $b = 10 \log I/I_0$, donde I_0 es el nivel de referencia y vale $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, e I , el nivel de la intensidad del sonido que se desea medir. (b se expresa en decibelios)

a) Calcula cuántos decibelios tiene el sonido cuya intensidad es la de referencia.

b) Si el nivel de la intensidad del sonido del tráfico en una gran ciudad es de 70 decibelios, calcula cuál es su intensidad en W/m^2 .

a) $b(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$

$$b(10^{-12}) = 10 \cdot \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 1 = 10 \cdot 0 = 0 \text{ db}$$

b) $70 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow 7 = \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow 10^7 = \frac{I}{10^{-12}}$

$$\Rightarrow I = 10^{19} \text{ W/m}^2$$

1. Representa las siguientes funciones y determina sus propiedades:

a) $f(x) = e^{2x}$

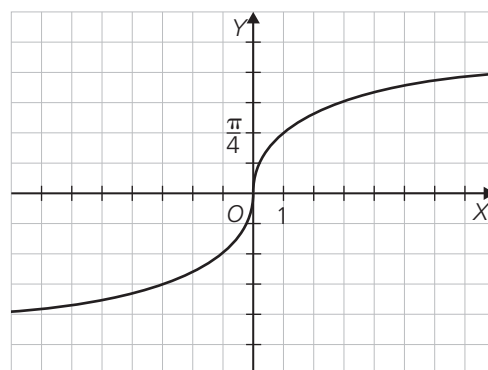
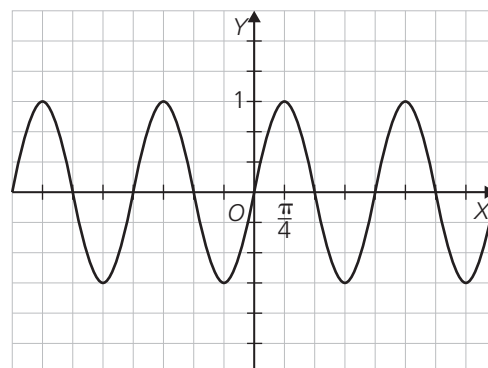
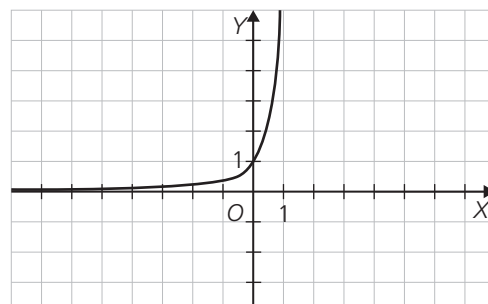
b) $g(x) = \sin(2x)$

c) $h(x) = \arctg(x - 1)$

- a) ■ El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(0, +\infty)$.
 ■ Función continua, estrictamente creciente y cóncava en su dominio.
 ■ Tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

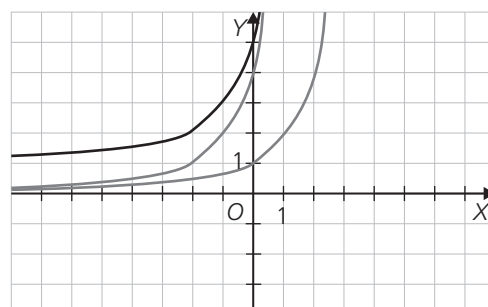
- b) ■ El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $[-1, 1]$.
 ■ Función continua en su dominio.
 ■ Función periódica, de período π .
 ■ Tiene simetría impar.

- c) ■ El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(-\infty, +\infty)$.
 ■ Función continua, estrictamente creciente en su dominio.
 ■ Asíntotas horizontales: $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$



2. Haz un estudio y representa gráficamente a partir de la gráfica de $f(x) = 2^x$, la función: $g(x) = 2^{x+2} + 1$

- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(1, +\infty)$.
 ■ Función continua, estrictamente creciente y cóncava en su dominio.
 ■ Tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 1$ ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.



3. Se sabe que la demanda de un producto sigue la ecuación $f(x) = A \cdot 3^{-kx}$ siendo x el tiempo, en años, de demanda del producto. Calcula las constantes A y k , si sabemos que a los dos años se hizo una demanda de 729 unidades y que a los 5 años tuvo una demanda de 27 unidades.

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones imponiendo las condiciones del enunciado:

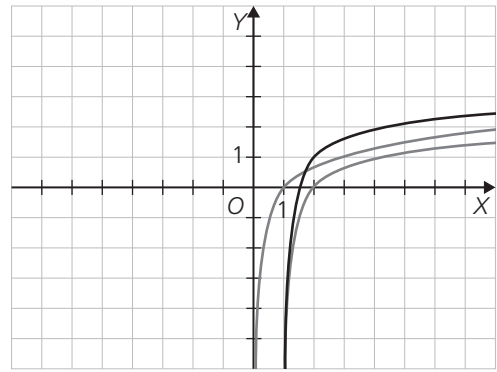
$$\begin{cases} 729 = A \cdot 3^{-2k} \\ 27 = A \cdot 3^{-5k} \end{cases}$$

Si dividimos las ecuaciones, obtenemos la ecuación: $27 = 3^{3k}$ cuya solución es $k = 1$. Sustituyendo, obtenemos que $A = 6\,561$.

La función que sigue la demanda es: $f(x) = 6\,561 \cdot 3^{-x}$

4. Haz un estudio y representa gráficamente, a partir de la gráfica de $f(x) = \ln x$, la función: $g(x) = \ln(x-1) + 1$

- El dominio de la función es $(1, +\infty)$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.
- Función continua, estrictamente creciente y convexa en su dominio.
- Tiene una asíntota vertical en la recta $x = 1$ ya que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.



5. Cierta método numérico contabiliza el número de operaciones que realiza para ordenar listas de números, siguiendo la fórmula $f(x) = Ax \log x + Bx$ siendo x el número de elementos de la lista a ordenar. Calcula las constantes A y B si sabemos que para una lista de 10 elementos necesita 120 operaciones y que para una lista de 10 000 elementos realiza 420 000.

Imponemos las condiciones del enunciado y obtenemos el sistema:
$$\begin{cases} 120 = 10 \log 10 \cdot A + 10 \cdot B \\ 420\,000 = 10\,000 \log 10\,000 \cdot A + 10\,000 \cdot B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 12 \\ 4A + B = 42 \end{cases}$$

Este sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución:
$$\begin{cases} A = 10 \\ B = 2 \end{cases}$$

Así pues, la función que contabiliza el número de operaciones es: $f(x) = 10x \log x + 2x$

6. Estudia el dominio de la siguiente función: $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$

Por las propiedades de las razones trigonométricas se verifica que:
$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

Para que la función $f(x)$ tenga sentido se tiene que verificar que $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) \neq 0$. Así pues:

$$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto: $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = \pi + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}\right\}$

7. Dada la función $f(x) = 5 \cdot \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, determina:

- a) El dominio y recorrido de la función.
- b) El período.
- c) El valor máximo y el valor mínimo.
- d) Su función inversa. ¿Cuál sería el dominio de esta función? ¿Y su recorrido?

a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ y $\operatorname{Rec} f = [-5, 5]$.

b) $f(x) = 5 \cdot \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 5 \cdot \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 5 \cdot \operatorname{sen}\left(2(x + \pi) - \frac{\pi}{4}\right) = f(x + \pi) \Rightarrow T = \pi$

c) Los valores mínimos y máximos se alcanzarán cuando el seno tenga su valor mínimo y máximo. Entonces, los valores mínimos y máximos valdrán -5 y 5 respectivamente.

d) La función inversa de $f(x)$ es $f^{-1}(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$ cuyo dominio es $[-5, 5]$ y su recorrido es $\left[\frac{-\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$.

8. El movimiento de una onda se estudia a partir de la ecuación $f(x) = 3 \cdot \cos(2\pi x)$. Calcula:

- a) La amplitud del movimiento (valor máximo del recorrido).
- b) El período del movimiento.
- c) El número de oscilaciones en ese período.

La función describe el movimiento de una onda con respecto al tiempo cuya expresión general es: $y = A \cos(\omega x + \delta)$

a) La amplitud del movimiento corresponde al valor máximo del recorrido cuyo valor será 3. En la ecuación se representa por A .

b) El período vendrá representado mediante la fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Por tanto: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ s

c) El número de oscilaciones corresponde a la frecuencia del movimiento que es la inversa del período. En este caso es 1 Hz.